


Correction Feuille Exercice 2

 *Composer une fonction*

**Exercice 12**

1. Les fonctions  $u$  et  $v$  sont définies sur  $\mathbb{R}$  donc la composée est définie sur  $\mathbb{R}$ . Ainsi  $u \circ v$  est défini sur  $\mathbb{R}$  et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u \circ v(x) = e^{x^2+2x+1}.$$

De même,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad v \circ u(x) = e^{2x} + 2e^x + 1.$$

2. La fonction  $u$  est défini sur  $\mathbb{R}_+^*$  et  $v$  est définie sur  $\mathbb{R}^*$ . Pour déterminer le domaine de définition de  $u \circ v$ , on résout  $\frac{1}{x} > 0 \iff x > 0$ . La fonction  $u \circ v$  est définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad u \circ v(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right).$$

Pour déterminer le domaine de définition de  $v \circ u$ , on résout  $\ln(x) = 0 \iff x = 1$ . La fonction  $v \circ u$  est définie sur  $]0; 1[ \cup ]1; +\infty[$  et

$$\forall x \in ]0; 1[ \cup ]1; +\infty[, \quad v \circ u(x) = \frac{1}{\ln(x)}.$$

**Exercice 13 (\*)**

1. La fonction  $g_1$  est la composée de  $f(x) = e^x$  dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $u(x) = x^2 + 3x + 1$  dérivable sur  $\mathbb{R}$ . La fonction  $g_1$  est donc dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant que composée et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_1'(x) = u'(x)f'(u(x)) = (2x + 3)e^{x^2+3x+1}$$

2. La fonction  $g_2$  est la composée de  $f(x) = \ln(x)$  dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et  $u(x) = x^2 + 1$  définie sur  $\mathbb{R}$ . Or  $u$  est strictement positive sur son ensemble de définition. Donc  $g_2$  es dérivable sur  $\mathbb{R}$  et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_2'(x) = u'(x)f'(u(x)) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

**Exercice 14 (\*\*)**

1. La fonction  $g_1$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant que composée de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_1'(x) = 3\Phi'(3x + 5) = 3e^{-(3x+5)^2/2}$$

2. La fonction  $x \rightarrow \sqrt{x}$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et donc  $g_2$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  est dérivable en tant que composée de fonctions dérivables sur  $]0; +\infty[$  et

$$\forall x \in ]0; +\infty[, \quad g_2'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\Phi'(x) = \frac{e^{-x/2}}{2\sqrt{x}}$$

*Déterminer la parité d'une fonction*

**Exercice 15**

1. La fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  en tant que produit et composée de fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  et  $x^2 + 1 > 0$ . Le domaine de définition est donc symétrique. De plus

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) &= (-x) \ln((-x)^2 + 1) \\ &= -x \ln(x^2 + 1) \\ &= -f(x)\end{aligned}$$

La fonction  $f$  est donc impaire.

2. La fonction  $g$  est définie sur  $\mathbb{R}$  en tant que composée de fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  et  $x^2 + 1 > 0$ . Le domaine de définition est donc symétrique. De plus

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) &= \sqrt{(-x)^2 + 1} \\ &= \sqrt{x^2 + 1} \\ &= f(x)\end{aligned}$$

La fonction  $f$  est donc paire.

3. La fonction  $h$  est définie sur  $\mathbb{R}$  en tant que composée de fonctions définies sur  $\mathbb{R}$ . Le domaine de définition est donc symétrique. Or

$$f(1) = e^7 \quad \text{et} \quad f(-1) = e^3 \neq f(1)$$

La fonction  $f$  n'est donc ni paire ni impaire.

**Exercice 16 (\*)**

1. La fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  donc le domaine de définition est symétrique. De plus

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) &= |-x| \\ &= |-1| \times |x| \\ &= f(x)\end{aligned}$$

La fonction  $f$  est donc paire.

2. On a  $x^2 + 1 \neq 0$  et  $3x^2 + 5 > 0$ , la fonction  $g$  est donc définie sur  $\mathbb{R}$  (domaine symétrique). De plus


$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(-x) &= \left( \frac{1}{(-x)^2 + 1} \right)^2 \times \frac{(-x)^3}{\sqrt{3 \times (-x)^2 + 5}} \\ &= \left( \frac{1}{x^2 + 1} \right)^2 \times \frac{-x^3}{\sqrt{3 \times x^2 + 5}} \\ &= - \left( \frac{1}{x^2 + 1} \right)^2 \times \frac{x^3}{\sqrt{3x^2 + 5}} \\ &= -f(x)\end{aligned}$$

La fonction  $f$  est donc impaire.

**Exercice 17 (\*\*)**

La fonction est définie si  $x - 1 \neq 0$  et si  $x + 1 \neq 0$  donc sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ . Ce domaine est bien symétrique. On a alors

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}, \quad f(-x) &= \ln \left| \frac{-x+1}{-x-1} \right| \\ &= \ln \left| \frac{(-1) \times (x-1)}{(-1) \times (x+1)} \right| \\ &= \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \\ &= -\ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

 *Déterminer un majorant ou un minorant*

**Exercice 18**

1. La fonction  $\ln$  étant strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+$ ,

$$\begin{aligned} 1 \leq x \leq 5 &\iff \ln(1) \leq \ln(x) \leq \ln(5) \\ &\iff 0 \leq f(x) \leq \ln(5) \end{aligned}$$

On conclut que 0 est un minimum de la fonction  $f$  et  $\ln(5)$  est un maximum

2. On étudie la fonction  $g$  à l'aide de son tableau de variation

$x$	-3	0	4
Variations de $x^2 - 1$	8	-1	15

On conclut que -1 est un minimum de la fonction  $g$  sur  $[-3; 4]$  et 15 est un maximum

**Exercice 19 (\*)**

1. La fonction  $f$  est dérivable sur  $[-2; 3]$  et  $f'(x) = 2x$ . Soit  $x \in [-2; 3]$  alors

$$-4 \leq 2x \leq 6 \iff |2x| \leq 6.$$

On en conclut,

$$\forall x \in I, \quad |f'(x)| \leq 6.$$

2. La fonction  $f$  est dérivable sur  $[0; \ln(2)]$  et  $f'(x) = 2e^{2x} - 6$ . Soit  $x \in [0; \ln(2)]$  alors

$$\begin{aligned} 0 \leq 2x \leq 2\ln(2) &\iff 1 \leq e^{2x} \leq 4 \\ &\iff 2 \leq 2e^{2x} \leq 8 \\ &\iff -4 \leq 2e^{2x} - 6 \leq 2 \\ &\iff |2e^{2x} - 6| \leq 4 \end{aligned}$$

On en conclut,

$$\forall x \in I, \quad |f'(x)| \leq 4.$$

**Exercice 20 (\*\*)**

Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . La fonction  $f$  est dérivable sur  $[k; k+1]$  et sa dérivée est  $f'(x) = \frac{1}{x}$ . On a alors pour tout  $x \in I$ .

$$k+1 \geq x \geq k \iff \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}$$

On en conclut,

$$\boxed{\forall x \in [k; k+1], \quad \frac{1}{k+1} \leq |f'(x)| \leq \frac{1}{k}.}$$

## Résoudre des inéquations

**Exercice 21**

1. On résout la première inégalité par une méthode directe.

$$\begin{aligned} e^{2x+1} > e^x &\iff 2x+1 > x \quad (\text{car la fonction ln est croissante}) \\ &\iff x+1 > 0 \\ &\iff x > -1 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc

$$\boxed{\mathcal{S}_1 = ]-1; +\infty[.}$$

2. On résout la seconde inégalité en utilisant un tableau de signe. On a tout d'abord

$$x^2 > 5x - \frac{9}{4} \iff x^2 - 5x + \frac{9}{4} > 0$$

On reconnaît un polynôme du second degré. Le discriminant associée est  $\Delta = 25 - 4 \times \frac{9}{4} = 16$ .

L'équation  $x^2 - 5x + \frac{9}{4} = 0$  a donc deux solutions :

$$x_1 = \frac{5-4}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5+4}{2} = \frac{9}{2}$$

On en déduit le tableau de signe suivant

$x$	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{2}$	$+\infty$	
Signe de $x^2 - 5x + \frac{9}{4}$	+	0	-	0	+

L'ensemble des solutions est donc

$$\boxed{\mathcal{S}_2 = ]-\infty; \frac{1}{2}[ \cup ]\frac{9}{2}; +\infty[.}$$

3. On résout la dernière équation en posant une fonction. En effet,

$$e^x \geq x \iff e^x - x \geq 0.$$

On pose alors la fonction  $f : x \rightarrow e^x - x$  définie sur  $\mathbb{R}$ . Cette fonction est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = e^x - 1$$

Afin d'étudier la fonction  $f$ , on résout alors

$$\begin{aligned} f'(x) \geq 0 &\iff e^x - 1 \geq 0 \\ &\iff e^x \geq 1 \\ &\iff x \geq 0 \end{aligned}$$

On en déduit alors le tableau de variation de la fonction  $f$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$-$	$0$	$+$
Variations de $f$			

0 est un minimum de la fonction donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0 \iff e^x \geq x.}$$

### Exercice 22 (\*)

1. On résout la première inégalité de manière directe.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\ln(e^{-2x} + e^5)} \leq \frac{1}{5} &\iff \ln(e^{-2x} + e^5) \geq 5 \quad \text{fonction inverse décroissante sur } \mathbb{R}_+^* \\ &\iff e^{-2x} + e^5 \geq e^5 \quad \text{fonction exponentielle croissante sur } \mathbb{R} \\ &\iff e^{-2x} \geq 0 \end{aligned}$$

Or ceci est tout le temps vrai donc

$$\boxed{\mathcal{S}_1 = \mathbb{R}}$$

2. On résout cette inégalité à l'aide d'un tableau de signe. Mais avant cela, il faut faire quelques calculs :

$$\begin{aligned} \frac{x+5}{x-1} > \frac{x+2}{x+1} &\iff \frac{x+5}{x-1} - \frac{x+2}{x+1} > 0 \\ &\iff \frac{(x+5)(x+1)}{(x-1)(x+1)} - \frac{(x+2)(x-1)}{(x+1)(x-1)} > 0 \\ &\iff \frac{(x^2 + 5x + x + 5) - (x^2 + 2x - x - 2)}{(x-1)(x+1)} > 0 \\ &\iff \frac{x^2 + 6x + 5 - x^2 - x + 2}{(x-1)(x+1)} > 0 \\ &\iff \frac{5x + 7}{(x-1)(x+1)} > 0 \end{aligned}$$

On en déduit alors le tableau de signe suivant :

$x$	$-\infty$	$-\frac{7}{5}$	$-1$	$1$	$+\infty$
Signe de $5x + 7$	-	0	+	+	+
signe de $(x + 1)$	-	-	0	+	+
signe de $(x - 1)$	-	-	-	0	+
signe du quotient	-	0	+	-	+

D'après le tableau de variation précédent, l'ensemble des solutions est :

$$\mathcal{S}_2 = \left] -\frac{7}{5}; -1 \right[ \cup ] 1; +\infty[.$$

3. On résout la dernière équation en posant une fonction. En effet,

$$\ln(x) < \frac{x}{e} \iff \ln(x) - \frac{x}{e} < 0.$$

On pose alors la fonction  $f : x \rightarrow \ln(x) - \frac{x}{e}$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Cette fonction est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  en tant que somme de fonctions dérivables sur cet intervalle et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e}$$

Afin d'étudier la fonction  $f$ , on résout alors

$$\begin{aligned} f'(x) \geq 0 &\iff \frac{1}{x} - \frac{1}{e} \geq 0 \\ &\iff \frac{1}{x} \geq \frac{1}{e} \\ &\iff x \leq e \end{aligned}$$

On en déduit alors le tableau de variation de la fonction  $f$

$x$	$0$	$e$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+	0	-
Variations de $f$			

0 est un maximum de la fonction atteint une seule fois en  $x = e$ . Donc

$$\mathcal{S}_3 = ]0, 1[ \cup ] 1; +\infty[.$$

### Exercice 23 (\*\*)

Pour les deux inégalités de cet exercice, il faut raisonner au brouillon en partant de la fin pour savoir d'où l'on part. Puis il faut rédiger l'inégalité dans le bon sens.

1. Pour la première,

$$\begin{aligned} \forall x \geq 0, \quad x + 3 &\geq x + 1 \\ \iff \frac{1}{x + 3} &\leq \frac{1}{x + 1} \quad \text{fonction inverse décroissante} \\ \iff \boxed{\sqrt{\frac{1}{x + 3}} &\leq \sqrt{\frac{1}{x + 1}}} \end{aligned}$$

2. Pour la seconde,

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 &\geq 0 \\ \iff x^2 + 2x + 1 &\geq 2x + 1 \\ \iff (x + 1)^2 &\geq 2x + 1 \\ \iff \boxed{e^{(x+1)^2} &\geq e^{2x+1}} \end{aligned}$$

## Étudier des fonctions

### Exercice 24 (Étude complète d'une fonction)

Étudier la fonction définie par

$$f(x) = \ln(x + 1) + \frac{1}{x - 1}.$$

1. On résout l'inéquation

$$x + 1 > 0 \iff x > -1.$$

La fonction  $x \rightarrow \ln(x + 1)$  est donc définie sur  $] - 1; +\infty[$ . On résout ensuite l'équation

$$x - 1 = 0 \iff x = 1.$$

La fonction  $x \rightarrow \frac{1}{x - 1}$  est définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ . La fonction  $f$  étant une somme des deux fonctions précédentes, son domaine de définition est

$$\boxed{D = ] - 1; 1[ \cup ] 1; +\infty[.}$$

2. Le domaine de définition de la fonction  $f$  n'est pas symétrique.

$\boxed{\text{La fonction } f \text{ n'admet pas de parité.}}$

$$3. \text{ --- } \lim_{x \rightarrow -1}^> \ln(x + 1) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -1}^> \frac{1}{x - 1} = -\frac{1}{2} \text{ donc par somme } \boxed{\lim_{x \rightarrow -1}^> f(x) = -\infty.}$$

$$\text{--- } \lim_{x \rightarrow 1}^< \ln(x + 1) = \ln(2) \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1}^< \frac{1}{x - 1} = -\infty \text{ donc par somme } \boxed{\lim_{x \rightarrow 1}^< f(x) = -\infty.}$$

$$\text{--- } \lim_{x \rightarrow 1}^> \ln(x + 1) = \ln(2) \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1}^> \frac{1}{x - 1} = +\infty \text{ donc par somme } \boxed{\lim_{x \rightarrow 1}^> f(x) = +\infty.}$$

$$\text{--- } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x + 1) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x - 1} = 0 \text{ donc par somme } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.}$$

4. En tant que somme de fonctions dérivables sur  $D$ ,  $f$  est dérivable sur  $D$ .

$$\begin{aligned}\forall x \in D, f'(x) &= \frac{1}{x+1} + \frac{-1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{(x-1)^2 - (x+1)}{(x+1)(x-1)^2} \\ &= \frac{x^2 - 2x + 1 - x - 1}{(x+1)(x-1)^2} \\ &= \frac{x^2 - 3x}{(x+1)(x-1)^2} \\ &= \frac{x(x-3)}{(x+1)(x-1)^2}\end{aligned}$$

On en déduit alors le tableau de variation suivant :

$x$	-1	0	1	3	$+\infty$	
Signe de $x+1$	+	+	+	+	+	
Signe de $x(x-3)$	+	0	-	-	0	+
Signe de $f'(x)$	+	0	-	-	0	+
Variations de $f$	$-\infty$	$-1$	$-\infty$	$+\infty$	$\frac{7}{2}$	$+\infty$

5. On détermine l'allure de la courbe

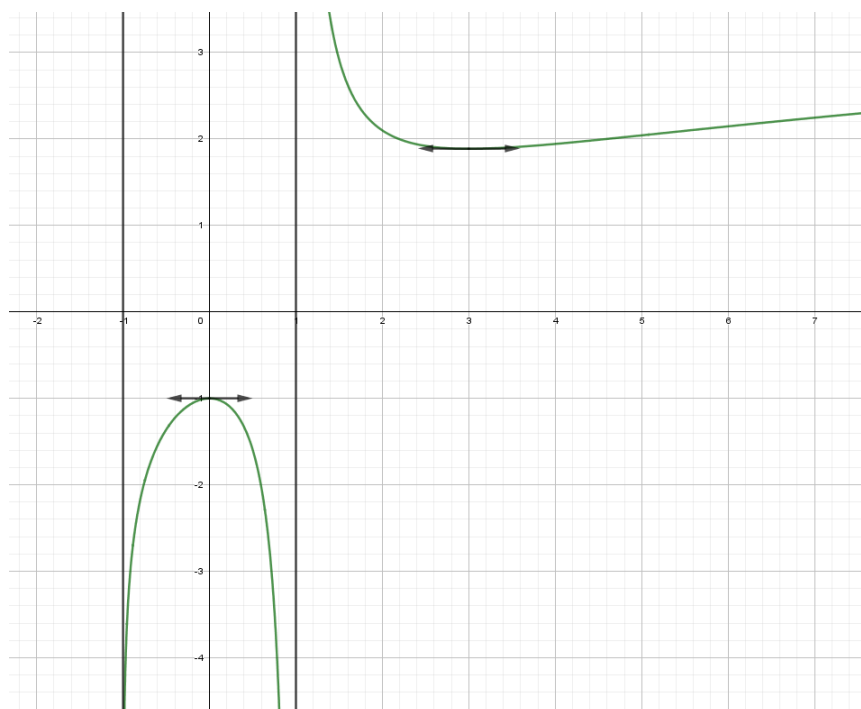


Figure 1 – La fonction  $f$  de l'exercice 24



**Exercice 26 (\*\*)**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - e^{-x}$ . La fonction  $f$  est dérivable en tant que somme de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = x + e^{-x}$$

Il faudrait résoudre l'inéquation  $x + e^{-x} \geq 0$ . Mais l'on a vu que cette inéquation ne peut pas être résolue de manière directe, ou à l'aide d'un tableau de signe. Cependant, la fonction  $f'$  est elle-même dérivable sur  $\mathbb{R}$  et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = 1 - e^{-x}$$

On résout alors l'équation

$$1 - e^{-x} \geq 0 \iff 1 \geq e^{-x} \iff 0 \geq -x \iff x \geq 0$$

On en déduit alors le tableau de variation pour  $f'$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
Signe de $f''(x)$	$-$	$0$	$+$
Variations de $f'(x)$			
Signe de $f'$	$+$		$+$

La fonction  $f$  est donc strictement croissante.